Попова Ольга Валерьевна
МБОУ СОШ №95 г. Воронежа, учитель математики

Аналогия как средство для поиска решения задач

(2014г.)

Одним из важнейших показателей высокого уровня математического развития учащихся является умение решать нестандартные геометрические задачи. Целью современной школы является вооружение учеников различными методами и способами решения задач, а также обучение их самостоятельному поиску решения.

В исследованиях психологов, дидактов, методистов в последнее время ярко показано, что количество решенных задач не свидетельствует о наличии у школьников четко сформированного умения их решать.

В математике существуют такие приемы, которые могут облегчит сам поиск решения. Эти приемы не зависят от того, к какому типу или разделу относится та или иная задача, поэтому данные приемы получили название единых приемов целенаправленного поиска решения любых задач. Это так называемые эвристические приемы.

Что же такое эвристика? Нетрудно догадаться, что в основе слова лежит другое, более знакомое и близкое нам ещё по школьной легенде об Архимеде, когда ликующий и возбужденный своим внезапным открытием Архимед воскликнул: "Эврика! Эврика!", что значило: "Нашел! Нашел!" Да, эвристические приёмы решения задач в значительной степени именно помогают найти их решение.

В своей книге "Как решать задачу?" известный американский математик Д. Пойа так пишет об эвристике: "Эвристика - так называлась не совсем чётко очерченная область исследования, относимая то к логике, то к философии, то к психологии. Она часто охарактеризовывалась в общих чертах, редко излагалась детально и по существу предана забвению в настоящее время». Цель эвристики - исследовать методы и правила, как делать открытия и изобретения? Наиболее известные попытки создать стройную систему эвристики принадлежат Ренэ Декарту и Лейбницу. Декарт имел намерение разработать универсальный метод решения задач. Однако его "Правила для направления ума" остались неоконченными. Лейбниц также намеревался написать "Искусство изобретения", но не осуществил своего намерения. Интересное и подробное изложение эвристики оставил Бернард Больцано "Эвристика ставит себе целью установить общие закономерности тех процессов, которые имеют место при решении всякого рода проблем, независимо от их содержания". / Пойа / Прилагательное "эвристический", значит "служащий для открытия".

Процесс решения геометрической задачи в основном соответствует принципу решения любой задачи, который включает в себя такие основные моменты, как:

1) анализ задачи;

2) схематическая запись задачи;

3) поиск способа решения;

4) осуществление решения задачи;

5) проверка решения;

6) исследование задачи;

7) формулирование ответа задачи;

8) анализ решения;

Одним из популярных средств для поиска решения задачи является аналогия. Аналогия - сходство предметов в каких-либо свойственных признаках и отношениях, причем таких предметов, которые различны. Действия по аналогии таковы: на основе того , что два предмета имеют общие признаки , и установлено , что первый из них имеет ещё некоторый признак X наличие которого у второго предмета пока не известно , делается предположение (гипотеза) , что второму предмету , по видимому тоже присущ признак X.

Схема умозаключения по аналогии выглядит так.

Первая посылка: предмет A обладает признаками a , b , c , x.

Вторая посылка: предмет B обладает признаками a , b , c.

Заключение: предмет B, вероятно, тоже обладает признаком X.

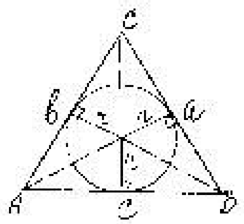
Таким образом, умозаключения по аналогии являются умозаключениями правдоподобными; для того, чтобы выяснить достоверность или ложность “вывода по аналогии” необходимо дополнительно исследовать этот вывод.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача№1. Зная стороны a , b , c в ΔABC вычислить радиус r вписанной в него окружности.

Решение

Решим вспомогательную задачу.1. Соединим центр O вписанной окружности с вершинами ΔABC



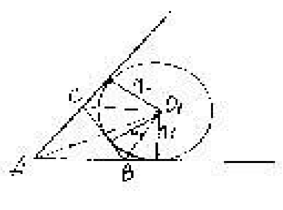
2. $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOC}+S_{\Delta BOC}$

3. ПустьS-площадь ΔABC. По формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p-полупериметр ΔABC

4. $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}cr$, $S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}br$ и т.д.

5. Тогда $S=\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr$, откуда $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

Решаем исходную задачу, проводя аналогичные рассуждения



1. Соединим центр O_1 окружности с вершинами ΔABC

2. $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AO1B}+S_{\Delta AO1C}-S_{\Delta BO1C}$

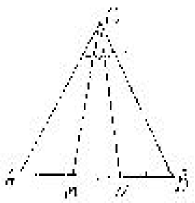
3. если S-площадь ΔABC,тоS= p(p-a)(p-b)(p-c)

4. $S_{\Delta AO1B}=\frac{1}{2}cr_1$, $S_{\Delta AO1C}=\frac{1}{2}br_1$, $S_{\Delta BO1C}=\frac{1}{2}ar_1$

5. (2)= >S= $\frac{1}{2}$ (b+c-a)r1. Замечая,что p-a= $\frac{1}{2}$ (b+c-a)-a= $\frac{a+b+c-2a}{2}=\frac{b+c-a}{2}$

получим следующий вывод:S=(p-a)r_1, откуда $r_1=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p-a}}$

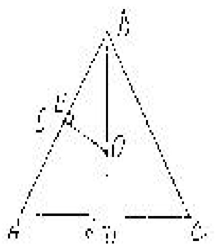
Задача №2. *В правильном ΔABC отрезки CM и CN,проведенные из вершины C делят противоположную сторону на 3 равные части. Будут ли равны углы ACM, MCN и NCB? Решение*



Предположим, что данное утверждение верно, т.е. ∠ACM=∠MCN, тогда ΔACN- равнобедренный, и CM в нём – высота. С другой стороны при предположении о равенстве углов MCB и NCB мы получаем, что треугольник MCB- равнобедренный, и CN- высота, таким образом мы имеем в ΔABC две высоты, проведенные из одной вершины C,

что невозможно. Поэтому наше предположение о равенстве данных трех углов не имеет места.

Ответ: нет.



Задача №3. Определить радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника , если основание и боковая сторона треугольника соответственно равны 6см и 5см.

Решение.

Чертеж по условию и требованию задачи позволяет выдвинуть предположение о том, что радиус OB целесообразно искать, исходя из подобия прямоугольных треугольников ABD и OBE (∠OBE- общий), т.к. Δ□OBE ~ ΔABC, то $\frac{OB}{AB}=\frac{EB}{BD}$, откуда: 1) OB=$\frac{AB\cdot BE}{BD}$, где BE и BD неизвестны;

2)BE=$\frac{1}{2}AB$, где AB - известно; BE=2,5см

3) BD=$\sqrt{AB^2-AD^2}$

4) AD=$\frac{1}{2}$AC

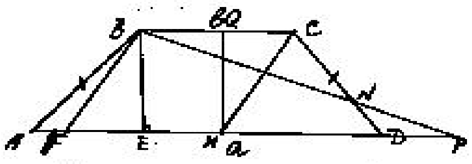
5) AD=$\frac{1}{2}*6=3см; AD=\sqrt{25-9}=4см; OB=\frac{5*2.5}{4}=3\frac{1}{3}см$

Ответ: $3\frac{1}{8}см$

Задача №4. В равнобедренной трапеции ABCД основания AД и BC равны соответственно *a* и b (*a*>b). Точка M является серединой AД, а точка N делит боковую сторону СД в отношение $\frac{DN}{NC}$ =K. Найти высоту трапеции, если прямые CM и BN взаимно перпендикулярны.

Решение

Продолжим BN и AD до пересечения в точке P, через т. P проведём прямую BF параллельно CM.



1. Т.к. по условию $BN \perp CM$, то ΔPBF прямоугольный. Его высота BE совпадает с высотой трапеции.
2. Найдём отрезки EF и EP, которые являются проекциями катетов треугольника PBF на гипотенузу. Пусть Q – середина BC. Имеем MF=BC=b, EM=BQ=$\frac{b}{2}$. Отсюда получаем FE=MF-EM=$\frac{b}{2}$. Далее EP=EM+MD+DP=$\frac{a+b}{2}$+DP
3. Из подобия ΔBNC и ΔPND находим DP=BC$\times\frac{ND}{NC}$=kb, таким образом EP=$\frac{a+b}{2}$+kb.
4. Зная проекции катетов на гипотенузу, по известной. формуле найдем высоту: BE=$\sqrt{FE\times EP}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{b\times(a+b+2kb)}$.Продолжим BN и AD до пересечения в точке P, через т. P проведём прямую BF параллельно CM.
5. Т.к. по условию $BN \perp CM$, то ΔPBF- прямоугольный. Его высота BE совпадает с высотой трапеции. Найдём отрезки EF и EP, которые являются проекциями катетов треугольника PBF на гипотенузу. Пусть Q – середина BC. Имеем MF=BC=b, EM=BQ=$\frac{b}{2}$. Отсюда получаем FE=MF-EM=$\frac{b}{2}$. Далее EP=EM+MD+DP=$\frac{a+b}{2}$+D .Из подобия ΔBNC и ΔPND находим DP=BC$\times\frac{ND}{NC}$=kb, таким образом EP=$\frac{a+b}{2}$+kb.
6. Зная проекции катетов на гипотенузу, по известной. формуле найдем высоту: BE=$\sqrt{FE\times EP}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{b\times(a+b+2kb)}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{b\times(a+b+2kb)}$